

## Correction Devoir maison n°8

**Exercice 1 - Inspiré ECRICOME 2018****Partie I**

1. (a) Le calcul donne

$$A^2 - 7A = \begin{pmatrix} -12 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix} = -12I_3$$

(b) D'après la question précédente, on a

$$(A - 7I_3) \times A = -12I_3 \iff \frac{-1}{12}(A - 7I_3) \times A = I_3$$

Donc la matrice  $A$  est inversible et

$$A^{-1} = \frac{-1}{12}(A - 7I_3).$$

(c) On résout l'équation  $X^2 - 7X + 12 = 0$  en calculant le discriminant  $\Delta = 49 - 48 = 1$ . L'équation a donc deux solutions

$$X_1 = \frac{7-1}{2} = 3 \text{ et } X_2 = \frac{7+1}{2} = 4.$$

(d) On résout les équations

$$\begin{aligned} E_3 : (A - 3I_3)X = 0 &\iff \begin{cases} -x + y - 2z = 0 \\ 0 = 0 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases} \\ &\iff x - y + 2z = 0 \\ &\iff x = y - 2z \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} y - 2z \\ y \\ z \end{pmatrix}, (y, z) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

On fait la même chose pour  $E_4$  :

$$\begin{aligned} E_4 : (A - 4I_3)X = 0 &\iff \begin{cases} 2x + y - 2z = 4x \\ 3y = 4y \\ x - y + 5z = 4z \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -2x - y + 2z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} z = -x \\ y = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ z \end{pmatrix}, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

2. (a) On regarde si la matrice  $B$  est inversible On applique le pivot de Gauss :

$$\begin{array}{ccc|ccc} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -3 & 3 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & & & \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} & & \begin{array}{l} 3L_1 + L_2 \rightarrow L_2 \\ L_1 + L_3 \rightarrow L_3 \end{array} & \end{array}$$

La méthode de Gauss a fait apparaître 3 pivots dont deux sont nuls.

La matrice  $B$  n'est pas inversible.

(b) On regarde si la matrice  $B$  est inversible On applique le pivot de Gauss :

$$\begin{array}{ccc|ccc} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & & & \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} & & \begin{array}{l} L_1 + L_2 \rightarrow L_2 \\ L_1 + L_3 \rightarrow L_3 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} & & L_3 \leftrightarrow L_2 & \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} & & \begin{array}{l} L_1 - L_2 \rightarrow L_1 \\ L_3 - 2L_2 \rightarrow L_3 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} & & L_1 - L_3 \rightarrow L_1 & \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} & & -L_3 \rightarrow L_3 & \end{array}$$

(c) Le calcul donne

$$B \times P = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -3 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$D_2 = P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(d) En calculant, on obtient

$$D_1 = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

## Partie II

1. On injecte la définition de  $Y_n$  mais on commence par observer que

$$P^{-1}A = D_2P^{-1}, \quad \text{et} \quad P^{-1}B = D_1P^{-1}.$$

$$\begin{aligned} Y_{n+2} &= P^{-1}X_{n+2} \\ &= P^{-1} \left( \frac{1}{6}AX_{n+1} + \frac{1}{6}BX_n \right) \\ &= \frac{1}{6}P^{-1}AX_{n+1} + \frac{1}{6}P^{-1}BX_n \\ &= \frac{1}{6}D_1P^{-1}X_{n+1} + \frac{1}{6}D_2P^{-1}X_n \\ &= \frac{1}{6}D_1Y_{n+1} + \frac{1}{6}D_2Y_n, \end{aligned}$$

ce qu'on voulait.

2. Comme

$$D_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad D_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

la relation précédente donne immédiatement

$$\begin{aligned} Y_{n+2} = \frac{1}{6}D_1Y_{n+1} + \frac{1}{6}D_2Y_n &\iff \begin{cases} a_{n+2} = \frac{1}{6} \times 3a_{n+1} + \frac{1}{6} \times 3a_n \\ b_{n+2} = \frac{1}{6} \times 3b_{n+1} + 0 \\ c_{n+2} = \frac{1}{6} \times 4c_{n+1} + \frac{1}{6} \times 2c_n \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a_{n+2} = \frac{1}{2}a_{n+1} + \frac{1}{2}a_n \\ b_{n+2} = \frac{1}{2}b_{n+1} \\ c_{n+2} = \frac{2}{3}c_{n+1} + \frac{1}{3}c_n \end{cases}, \end{aligned}$$

ce qu'on nous demandait.

3. On obtient

$$Y_0 = P^{-1}X_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad Y_1 = P^{-1}X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

4. On reconnaît deux suites à récurrence linéaire d'ordre 2 ( $(a_n)$  et  $(c_n)$ ) et pour  $b_n$  une suite géométrique de raison  $1/2$ . On commence par celle-ci car c'est la plus immédiate à exprimer

$$b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n b_0 = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

Pour les deux autres, on suit le protocole du cours, en commençant par introduire l'équation caractéristique. Pour  $(a_n)$ , celle-ci est

$$q^2 - \frac{1}{2}q - \frac{1}{2} = 0 \iff q = 1 \quad \text{ou} \quad q = -\frac{1}{2}.$$

Ainsi,

$$a_n = \lambda \times 1^n + \mu \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

où  $\lambda$  et  $\mu$  sont à déterminer avec les conditions initiales. En injectant les valeurs pour  $n = 0$  et  $n = 1$ , on trouve

$$a_n = \frac{4}{3} + \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

Enfin, pour  $(c_n)$ , l'équation caractéristique est

$$q^2 - \frac{2}{3}q - \frac{1}{3} = 0 \iff q = 1 \quad \text{ou} \quad q = -\frac{1}{3}.$$

Ainsi,

$$c_n = \lambda + \mu \left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

et on applique la même méthode pour trouver  $\lambda$  et  $\mu$ , pour obtenir

$$c_n = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \left(-\frac{1}{3}\right)^n.$$

5. Par définition

$$Y_n = P^{-1}X_n \iff X_n = PY_n.$$

Ou encore

$$X_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{4}{3} + \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \left(-\frac{1}{3}\right)^n \end{pmatrix}$$

On veut seulement  $\beta_n$ , résultat de la deuxième ligne de  $P$  appliquée à  $Y_n$ , et on trouve

$$\beta_n = -a_n + b_n = -\frac{4}{3} - \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1},$$

et on retrouve avec une certaine fierté l'égalité demandée.

6. Le programme demandé reprend la structure classique d'un programme permettant le calcul des termes d'une suite à récurrence linéaire d'ordre 2.

```
n = input("Entrez un nombre entier")
Xold=[3;0;-1]
Xnew=[3;0;-2]
A=[2,1,-2;0, 3,0; 1, -1, 5]
B=[1,-1,-1; -3,3,-3;-1, 1, 1]
for i=2:n
    Aux=1/6*A*Xnew+1/6*B*Xold
    Xold=Xnew
    Xnew=Aux
end
disp(Xnew)
```

7. Pour chaque suite, le dernier terme représenté correspond à  $n = 10$ . Pour cette valeur de  $n$ , les termes de chaque suite sont proches de leurs limites. On voit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \frac{4}{3} + \frac{1}{2} = \frac{11}{6} \sim 1.8, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \beta_n = -\frac{4}{3} \sim -1.3$$

Ainsi, la suite avec des croix  $\times$  correspond à  $(\alpha_n)$ , celle avec des croix entourées à  $(\beta_n)$  et celle avec des losanges à  $(\gamma_n)$ .

## Exercice 2 - Inspiré d'ECRICOME 2004 ECT

L'exercice se propose d'étudier la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

La fonction  $f$  étant définie sur  $\mathbb{R}$  par : Pour tout  $x$  réel,  $f(x) = e^{-x} \ln(1 + e^x)$ .

### Étude d'une fonction $g$ intermédiaire.

On considère la fonction définie sur  $\mathbb{R}_+$  par :

$$\forall t \geq 0, \quad g(t) = \frac{t}{t+1} - \ln(1+t)$$

1. Pour tout  $t \geq 0$ ,  $t+1 > 0$ , donc

- $t \rightarrow t$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$
- $t \rightarrow t+1$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$  et ne s'annule pas sur cet intervalle.
- $t \rightarrow \ln(t+1)$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$

Donc  $g$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$  en tant que somme, quotient et composée de fonctions continues.

2. On a

$$\frac{t}{t+1} = \frac{t}{t(1+1/t)} = \frac{1}{1+\frac{1}{t}}$$

Or  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{t}} = 1$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+x) = +\infty$ . Donc

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = -\infty.$$

3. La fonction  $g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+$  en tant que somme, quotient et composée de fonction dérivables sur  $\mathbb{R}_+$ . On a alors

$$\begin{aligned} \forall t \geq 0, \quad g'(t) &= \frac{(t+1) - t}{(t+1)^2} - \frac{1}{t+1} \\ &= \frac{-t}{(t+1)^2} \leq 0 \end{aligned}$$

4. La fonction  $g$  est décroissante sur  $\mathbb{R}_+$ . La fonction  $g$  admet donc un maximum en 0. Or  $g(0) = 0$ .  
Donc

$$\forall t \geq 0, \quad g(t) \leq 0.$$

### Étude de la fonction $f$ .

5. La fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  en tant que produit et composée de fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) &= -e^{-x} \ln(1 + e^x) + e^{-x} \times \frac{e^x}{1 + e^x} \\ &= e^{-x} \left( \frac{e^x}{1 + e^x} - \ln(1 + e^x) \right) \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^{-x}g(e^x).}$$

6. On a

$$e^{-x} \ln(1 + e^x) = \frac{\ln(1 + e^x)}{e^x}$$

Et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + e^x)}{e^x} = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + X)}{X}$ . Par taux d'accroissements,

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1.}$$

On a aussi

$$e^{-x} \ln(1 + e^x) = e^{-x} \ln(e^x(e^{-x} + 1)) = e^{-x}(x + \ln(1 + e^{-x})) = xe^{-x} + e^{-x} \ln(1 + e^{-x}).$$

Or  $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$  par croissance comparée et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} \ln(1 + e^{-x}) = 0$ . Ainsi

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.}$$

7. Pour tout  $x$  réel,  $e^x > 0$  et donc  $g(e^x) < 0$ . De plus,  $e^{-x} > 0$  et on a donc  $f'(x) < 0$ .

La fonction  $f$  est strictement décroissante sur  $\mathbb{R}$ .

On trace alors son tableau de variations.

$x$	$-\infty$	$0$	$1$	$+\infty$
Variations de $f$	$1 \xrightarrow{\quad} \ln(2) \xrightarrow{\quad} \frac{\ln(1+e)}{e} \xrightarrow{\quad} 0$			

8. Sachant que

- $f$  est continue sur  $[0, 1]$ ,
- $f$  est strictement décroissante sur  $[0, 1]$ ,
- $f([0, 1]) = \left[ \frac{\ln(1+e)}{e}; \ln(2) \right] \subset [0; 1]$ .

$f$  est une bijection sur  $[0, 1]$  à valeurs dans  $\left[ \frac{\ln(1+e)}{e}; \ln(2) \right] \subset [0; 1]$  (On dit que  $f$  est stable par  $[0; 1]$ ). On a alors,

$$\boxed{\forall x \in [0, 1], \quad 0 \leq f(x) \leq 1.}$$

9. Compléter le script suivant qui permet de tracer la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[0, 1]$  (on prendra 1000 points en abscisses).

```
function ..y = f(x)..
    y = ..exp(-x) * log(1+exp(x))..
..endfunction..
```

```
x = ..linspace(0,1,1000)..
plot(x,f)
```

## Étude de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

10. Voici le script Scilab

```
n = input("Donnez une valeur de n")
u = 0
for k = 1 : n
    u = f(u) \\La fonction f étant définie à la question précédente
end
disp("Le nième terme de la suite est " + string(u))
```

11. Soit  $x \in [0, 1]$ . Premièrement,  $f'$  est négative donc  $|f'(x)| = -f'(x) = -e^{-x}g(e^x)$ . Deuxièmement, comme la fonction  $g$  est décroissante et négative,

$$\begin{aligned} 0 \leq x \leq 1 &\implies g(1) \geq g(e^x) \geq g(e) \\ &\implies -g(1) \leq -g(e^x) \leq -g(e) \\ &\implies -g(e^x) \leq |g(e)| \end{aligned}$$

Enfin,  $e^{-x} \leq 1$ . En combinant toutes ces inégalités, on obtient

$$\boxed{\forall x \in [0, 1], \quad |f'(x)| \leq |g(e)|.}$$

12. On considère la fonction  $h$  définie sur  $[0, 1]$  par :  $h(x) = f(x) - x$ . (Remarque, il n'y avait pas de question 12)

13. La fonction  $h$  est dérivable en tant que somme de fonctions dérivables. Et

$$\forall x \in [0, 1], \quad h'(x) = f'(x) - 1 = e^{-x}g(e^x) - 1$$

Or  $g$  est négative sur  $[0, 1]$  donc  $h'$  est strictement négative sur  $[0, 1]$ .

$$\boxed{\text{La fonction } h \text{ est strictement décroissante sur } [0, 1].}$$

(a) On applique le théorème de la bijection. On calcule  $h(0) = f(0) - 0 \simeq 0,69$  et  $h(1) = f(1) - 1 \simeq -0,52$

- La fonction  $h$  est continue sur  $[0, 1]$ .
- La fonction  $h$  est strictement décroissante sur  $[0, 1]$ .
- $h(0) > 0$  et  $h(1) < 0$ .

D'après le théorème de la bijection, il existe un unique  $\alpha \in [0, 1]$  tel que  $h(\alpha) = 0$ .

(b) L'équation  $f(x) = x$  est équivalente à  $h(x) = 0$  et cette dernière équation à une unique solution. Donc il existe un unique  $\alpha \in [0, 1]$  tel que  $f(\alpha) = \alpha$ .

14. On montre les propriétés suivantes  $\mathcal{P}_n : \{0 \leq u_n \leq 1\}$ .

- **Initialisation** : La propriété  $\mathcal{P}_0$  s'écrit  $0 \leq u_0 \leq 1$ . Or,  $u_0 = 0$ . La propriété  $\mathcal{P}_0$  est donc vraie.
- **Hérédité** : On suppose que  $\mathcal{P}_n$  est vrai pour un certain rang  $n$ . (On a donc  $0 \leq u_n \leq 1$ )

$$0 \leq u_n \leq 1 \implies 0 \leq f(u_n) \leq 1$$

(d'après la question 7). La proposition  $\mathcal{P}_{n+1}$  est donc vraie. On en déduit que la suite des propositions  $(\mathcal{P}_n)$  est héréditaire.

- **Conclusion** :  $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq 1.}$

## Exercice 3 - ECRICOME 2017

Soit  $n$  un entier naturel non nul.

On effectue une série illimitée de tirages d'une boule avec remise dans une urne contenant  $n$  boules numérotées de 1 à  $n$ . Pour tout entier naturel  $k$  non nul, on note  $X_k$  la variable aléatoire égale au numéro de la boule obtenue au  $k$ -ième tirage.

Pour tout entier naturel  $k$  non nul, on note  $S_k$  la somme des numéros des boules obtenues lors des  $k$  premiers tirages :

$$S_k = \sum_{i=1}^k X_i.$$

On considère enfin la variable aléatoire  $T_n$  égale au nombre de tirages nécessaires pour que, pour la première fois, la somme des numéros des boules obtenues soit supérieure ou égale à  $n$ .

Exemple : avec  $n = 10$ , si les numéros obtenus aux cinq premiers tirages sont dans cet ordre 2, 4, 1, 5, 9, alors on obtient :  $S_1 = 2$ ,  $S_2 = 6$ ,  $S_3 = 7$ ,  $S_4 = 12$ ,  $S_5 = 21$  et  $T_{10} = 4$ .

### Partie A - Études de cas particuliers

1. Pour  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $X_k(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$  et l'on tire une des  $n$  boules au hasard. Donc  $X_k$  suit une loi uniforme

$$X_k \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$$

D'après le cours,

$$E(X_k) = \frac{n+1}{2}.$$

2. (a) Si l'on tire directement la boule numéroté  $n$ , alors  $T_n = 1$ . Si on ne tire que des boules numérotées 1 alors  $T_n = n$ . Tous les résultats intermédiaires sont possibles. Ainsi

$$T_n(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket.$$

- (b) On a vu que  $T_n = 1$  si et seulement si la première boule tirée est la boule numéro  $n$  donc

$$\mathbb{P}(T_n = 1) = \mathbb{P}(X_1 = n) = \frac{1}{n}.$$

- (c) Le seul moyen d'obtenir  $T_n = n$ , c'est d'obtenir les  $n - 1$  premières fois une boule numéro 1. Ainsi

$$\mathbb{P}(T_n = n) = \mathbb{P}(X_1 = 1 \cap X_2 = 1 \cap \dots \cap X_{n-1} = 1) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{n-1} X_j = 1\right)$$

Or les évènements  $(X_j = 1)_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  sont mutuellement indépendants. On a donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T_n = n) &= \prod_{j=1}^{n-1} \mathbb{P}(X_j = 1) \\ &= \prod_{j=1}^{n-1} \frac{1}{n} \\ &= \left(\frac{1}{n}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

3. On a  $T_2(\Omega) = \llbracket 1, 2 \rrbracket$ . Comme  $P(T_2 = 1) = \frac{1}{2}$  et  $P(T_2 = 2) = 1 - P(T_2 = 1) = \frac{1}{2}$ . On peut récapituler ces résultats dans un tableau :

$k$	1	2
$P(T_2 = k)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

4. Dans cette question,  $n = 3$ . On a  $T_3(\Omega) = \llbracket 1, 3 \rrbracket$ . De plus, d'après les questions précédentes,  $P(T_3 = 1) = \frac{1}{3}$  et  $P(T_3 = 3) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$ . On en déduit que

$$P(T_3 = 2) = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{5}{9}$$

On peut récapituler ces résultats dans un tableau :

$k$	1	2	3
$P(T_3 = k)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{1}{9}$

On calcule l'espérance de  $T_3$  et

$$\begin{aligned} E(T_3) &= 1 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{5}{9} + 3 \times \frac{1}{9} \\ &= \frac{2}{3} + \frac{10}{9} \\ &= \frac{16}{9} \end{aligned}$$

## Partie B - Étude de l'espérance dans le cas général

1. Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . La somme la plus faible est obtenu en ayant que des boules n° 1. La somme vaut alors  $k$ . La somme la plus forte obtenue est celle où l'on a que des boules  $n$ . Ainsi

$$S_k(\Omega) = \llbracket k; nk \rrbracket.$$

2. Soit  $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ .

(a) On a

$$S_{k+1} = S_k + X_{k+1}.$$

- (b) On utilise le système complet d'évènement  $(S_k = j)$  pour  $j \in \llbracket k; nk \rrbracket$ . D'après la formule des probabilités totales, on a pour  $i \in \llbracket k+1, n \rrbracket$ ,

$$\mathbb{P}(S_{k+1} = i) = \sum_{j=k}^{nk} \mathbb{P}(S_{k+1} = i \cap S_k = j)$$

Or pour  $j \in \llbracket i, nk \rrbracket$ ,  $(S_{k+1} = i) \cap (S_k = j) = \emptyset$ . En effet, si l'on a une somme au bout de  $k$  tirages égale à  $j \geq i$  alors il est impossible d'avoir une somme égale à  $i$  au  $k+1$ -ème tirage. On a donc

$$\mathbb{P}(S_{k+1} = i) = \sum_{j=k}^{i-1} \mathbb{P}(S_{k+1} = i \cap S_k = j)$$

De plus, pour  $j \in \llbracket k, i-1 \rrbracket$ , on a

$$(S_{k+1} = i) \cap (S_k = j) = (X_{k+1} = i - j) \cap (S_k = j)$$

En effet, si au  $k$ ème tirage, la somme des numéros tirés est  $j$  alors, il faut tirer la boule n°  $i - j$  au  $k + 1$ -ème tirage. Ainsi, l'équation devient

$$\mathbb{P}(S_{k+1} = i) = \sum_{j=k}^{i-1} \mathbb{P}(X_{k+1} = i - j \cap S_k = j)$$

Or les évènements  $X_{k+1} = i - j$  et  $S_k = j$  sont indépendants donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_{k+1} = i) &= \sum_{j=k}^{i-1} \mathbb{P}(X_{k+1} = i - j) \times \mathbb{P}(S_k = j) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j=k}^{i-1} \mathbb{P}(S_k = j) \end{aligned}$$

3. (a) D'après le cours, pour  $k \in \mathbb{N}^*$  et  $j \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\binom{j-1}{k-1} + \binom{j-1}{k} = \binom{j}{k}.$$

(b) On calcule pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$  et pour tout entier naturel  $i$  supérieur ou égal à  $k + 1$

$$\sum_{j=k}^{i-1} \binom{j-1}{k-1} = \sum_{j=k}^{i-1} \binom{j}{k} - \binom{j-1}{k}$$

On reconnaît une somme télescopique et donc

$$\begin{aligned} \sum_{j=k}^{i-1} \binom{j-1}{k-1} &= \binom{i-1}{k} - \binom{k-1}{k} \\ &= \binom{i-1}{k} \end{aligned}$$

On rappelle que  $\binom{k-1}{k} = 0$  puisque  $k-1 < k$ .

(c) Pour tout entier  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on note  $\mathcal{H}_k$  la proposition :

$$\ll \forall i \in \llbracket k, n \rrbracket, \mathbb{P}(S_k = i) = \frac{1}{n^k} \binom{i-1}{k-1} \gg.$$

• **Initialisation** : On vérifie  $\mathcal{H}_1$ . On vérifie que

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \mathbb{P}(S_1 = i) = \frac{1}{n} \binom{i-1}{k-1} = \frac{1}{n}$$

Or  $S_1 = X_1$  et  $X_1$  suit une loi uniforme donc

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \mathbb{P}(X_1 = i) = \frac{1}{n}$$

et ainsi la propriété  $\mathcal{H}_1$  est vraie.

- **Hérédité** : On suppose que la proposition  $\mathcal{H}_k$  est vraie pour un certain rang  $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ . On va alors montrer  $S_{k+1}$ . Pour tout  $i \in \llbracket k+1, n \rrbracket$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_{k+1} = i) &= \frac{1}{n} \sum_{j=k}^{i-1} \mathbb{P}(S_k = j) \quad \text{d'après question 2b} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j=k}^{i-1} \frac{1}{n^k} \binom{i-1}{k-1} \quad \text{hypothèse de récurrence} \\ &= \frac{1}{n^{k+1}} \sum_{j=k}^{i-1} \binom{i-1}{k-1} \\ &= \frac{1}{n^{k+1}} \binom{i-1}{k} \quad \text{d'après question 3b} \end{aligned}$$

Donc la proposition  $\mathcal{H}_{k+1}$  est vraie. La suite de proposition  $(\mathcal{H}_n)$  est héréditaire.

- **Conclusion** : Pour tout entier  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on a

$$\boxed{\ll \forall i \in \llbracket k, n \rrbracket, \mathbb{P}(S_k = i) = \frac{1}{n^k} \binom{i-1}{k-1} \gg.}$$

4. (a) Soit  $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ . L'évènement  $T_n > k$  signifie que somme des numéros obtenus dépasse  $n$  après le  $k$ -ème tirage. L'évènement  $S_k < n-1$  signifie que la somme des  $k$  premiers tirages est inférieur ou égal à  $n-1$ . Ces deux évènements sont les mêmes. Donc

$$\boxed{(T_n > k) = (S_k \leq n-1)}$$

- (b) On en déduit que  $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T_n > k) &= \mathbb{P}(S_k \leq n-1) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}(S_k = i) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{n^k} \binom{i-1}{k-1} \\ &= \frac{1}{n^k} \sum_{i=k}^{n-1} \binom{i-1}{k-1} \\ &= \boxed{\frac{1}{n^k} \binom{n-1}{k}}. \end{aligned}$$

5. En utilisant la définition de l'espérance, on a

$$\begin{aligned}
 E(T_n) &= \sum_{k=1}^n k \mathbb{P}(T_n = k) \\
 &= \sum_{k=1}^n k (\mathbb{P}(T_n \geq k) - \mathbb{P}(T_n \geq k+1)) \\
 &= \sum_{k=1}^n k \mathbb{P}(T_n \geq k) - k \mathbb{P}(T_n \geq k+1) \\
 &= \sum_{k=1}^n k \mathbb{P}(T_n \geq k) - (k+1) \mathbb{P}(T_n \geq k+1) + \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(T_n \geq k+1) \\
 &= \mathbb{P}(T_n \geq 1) - (n+1) \mathbb{P}(T_n \geq n+1) + \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(T_n > k) \\
 &= 1 - 0 + \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(T_n > k) + \mathbb{P}(T_n > n) \\
 &= P(T_n > 0) + \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(T_n > k) + 0 \\
 &= \boxed{\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(T_n > k)}
 \end{aligned}$$

On obtient alors en utilisant le binôme de Newton,

$$\begin{aligned}
 E(T_n) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n^k} \binom{n-1}{k} \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k 1^{n-1-k} \\
 &= \boxed{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1}}
 \end{aligned}$$

6. On a

$$\begin{aligned}
 \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1} &= e^{(n-1) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} \\
 &= \exp\left(\frac{n-1}{n} \times \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}\right)
 \end{aligned}$$

Or d'après les croissances comparées,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{\ln(1+X)}{X} = 1$$

et en factorisant,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n-1}{n} = 1$$

Donc par composée de limite,

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1} = e}$$

## Partie C - Étude Scilab

1. On rappelle que la fonction  $rand()$  en Scilab permet d'obtenir un nombre réel entre 0 et 1. Que permet la commande :

```
X = ceil(n*rand())
```

Cette commande permet d'obtenir un nombre entier aléatoire entre 1 et  $n$  et modélise ainsi une loi uniforme sur  $\llbracket 1, n \rrbracket$ . On considère désormais que l'expression précédente donne une modélisation de la variable aléatoire  $X_k$ .

2. Script Scilab

```
n = input("Entrer un nombre n")
S = 0
for k =1:n
    X = ceil(n*rand())
    S = S + X
end
disp(S)
```

3. On modifie le Script Scilab précédent pour qu'il affiche également une modélisation de  $T_n$ .

```
n = input("Entrer un nombre n")
S = 0
for k =1:n
    X = ceil(n*rand())
    S = S + X
    if S >= n then
        T = k
    end
end
disp(S)
disp(T)
```